შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 165

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$f(x+yf(x)) = f(f(x)) + xf(y)$.

$x=y=0$

$f(0) = f(f(0)) \Rightarrow f(f(0)) = f(f(f(0)))$

$y=0$

$f(x) = f(f(x)) + xf(0)$.

$x=f(0) \Rightarrow f(f(0)) = f(f(f(0))) + f(0)^2$, სადაც $f(f(0)) = f(f(f(0))) \Rightarrow f(0)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)=0. \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$.

$f(x+yf(x)) = f(x) + xf(y)$ (1)

$f(y+xf(y)) = f(y) + yf(x)$ (2).

(1) : $y=f(x)$

$f(x+f^2(x)) = f(x) + xf(f(x))$ (3)

(2) : $y=f(x)$

$f(f(x)+xf(f(x))) = f(f(x)) + f(x)^2$ (4)

$(3) \Rightarrow f(f(x)+xf(f(x))) = f(f(x+f^2(x))) = f(x+f^2(x))$ (5)

(4) $\wedge$ (5) $\Rightarrow f(f(x)) + f(x)^2 = f(x+f^2(x))$

$f(x) + f^2(x) = f(x+f^2(x))$ (6)

(1) : $y=f(x)$ (7)

$f(x+f^2(x)) = f(x) + xf(x)$

(6) $\wedge$ (7) $\Rightarrow f(x)+f^2(x) = f(x) + xf(x) \Rightarrow f(x)(f(x)-x) = 0$. (8)

(8)-იდან მივიღეთ რომ $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=x \end{array}\right.$

თუ ნებისმიერი x-ისთვის $f(x)=0$, მაშინ პასუხი $f(x)=0$ და შევამოწმოთ

$$f(x+yf(x)) = f(f(x))+xf(y)$$

$0 = 0+0$, ანუ $f(x)=0$-ი არის ერთი ამონახსნი, დავუშვათ ყველა x-ისთვის $f(x)\neq 0$.

თუ რომელიმე $x\neq 0$-ისთვის $f(x)\neq 0$, როგორც მივიღეთ, მაშინ $f(x)=x$

ვთქვათ, რომელიმე $y\neq 0$-ისთვის მივიღეთ, რომ $f(y)=0$

ჩავსვათ y და x =>

$$f(y+xf(y)) = f(y)+yf(x)$$

$$f(y) = 0+xy \Rightarrow 0=f(y)=xy, \text{ რადგან } x\neq 0 \Rightarrow y=0,$$

მივიღეთ, რომ თუ ფუნქცია არის ტოლი 0, მაშინ მხოლოდ 0-ში, ხდება 0.

როგორც მივიღეთ $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=x \end{array}\right.$, რადგან ფუნქცია მხოლოდ 0-ში ხდება 0 =>

$\Rightarrow f(x)=x.$

შევამოწმოთ $f(x)=x$.

$$f(x+yf(x)) = f(f(x))+xf(y)$$

$$x+yx = x+xy.$$

პასუხი: $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \text{ ყოველი } x\text{-ისთვის } x\in R \\ f(x)=x \text{ ყოველი } x\text{-ისთვის } x\in R. \end{array}\right.$

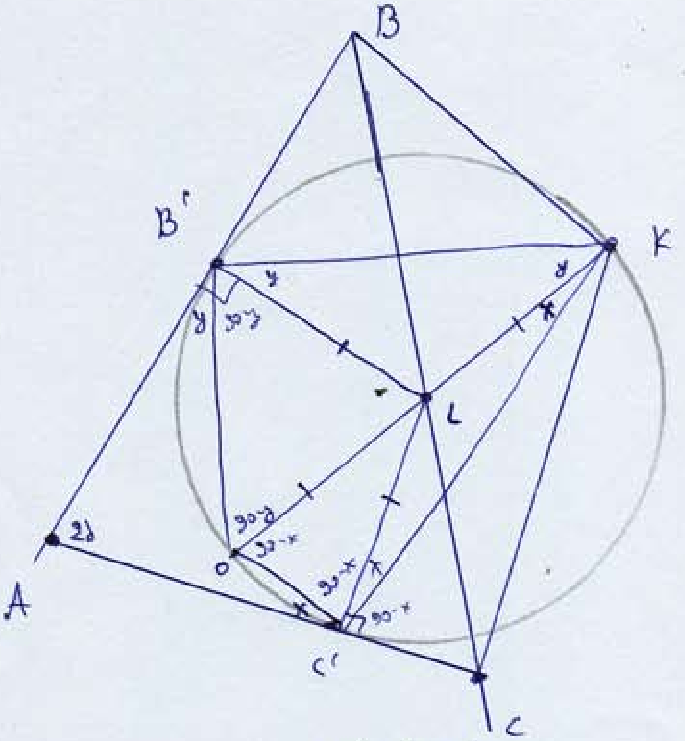
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	22.04.2012/ მათ/ II/ 165

ამოცანა № 5	გვერდი № 1



$\angle BAC = 2\alpha$.

ვთქვათ ~~დავუშვათ~~ ეს არის წრეწირის [illegible], რომელიც [illegible]
ამ შემთხვევაში [illegible] [illegible] წრეწირის [illegible] წვეროზე
და [illegible] ~~ვთქვათ ეს წრე~~ [illegible] OL და წრეწირის [illegible]
K წერტილამდე და ვაჩვენოთ, რომ $ABKL$ [illegible], ცხადია
რომ [illegible] [illegible] ამოცანა [illegible].

ცხადია, რომ $LK = LC' = LB'$. ვთქვათ $\angle C'KO = x$ და $\angle B'KO = y$

$\Rightarrow$ [illegible] AC' წრეწირის [illegible] $\Rightarrow \angle OC'A = x$ და $\angle OB'A = y$

$\angle LC'K = x$, რადგან $LC' = LK \Rightarrow \angle OC'L = 90 - x$

$\angle KB'L = y$ და $\angle OB'L = \angle LOB' = 90 - y$ ცხადია, რომ $\angle AB'C' = \frac{B'C'}{2} = x + y = \angle B'C'A$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №		22.04.2012/ მათ/ II/165

ამოცანა № 5 — გვერდი № 2

რადგან $AB' = AC'$ $\Rightarrow$ $2\alpha + 2(x+y) = 180$ $\Rightarrow$ $\alpha + x + y = 90$.

$\angle BKC = 180 - \angle BAC = 180 - 2\alpha = 180 - (180 - 2x - 2y) = 2x + 2y \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle B'KB + \angle C'KC = x + y$.

რადგან $B'L = LC'$ და $LB' \perp AB$, ხოლო $LC' \perp AC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ AL არის $\angle BAC$-ს ბისექტრისა $\Rightarrow \angle LAC' = \angle C'AB' = \alpha$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 165

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$$S = \frac{1}{a^2-2a+5} + \frac{1}{b^2-2b+5} + \frac{1}{c^2-2c+5} = \frac{1}{(a-1)^2+4} + \frac{1}{(b-1)^2+4} + \frac{1}{(c-1)^2+4}$$

$$a+b+c=1 \Rightarrow a-1=-(b+c) \Rightarrow (a-1)^2=(b+c)^2$$

$$a+b+c=1 \Rightarrow b-1=-(a+c) \Rightarrow (b-1)^2=(a+c)^2$$

$$a+b+c=1 \Rightarrow c-1=-(a+b) \Rightarrow (c-1)^2=(a+b)^2$$

მივიღეთ, რომ $S = \frac{1}{(b+c)^2+4} + \frac{1}{(a+c)^2+4} + \frac{1}{(a+b)^2+4}$

$$\left\{\begin{array}{ll} (b+c)^2+4 \equiv x & \Rightarrow b+c=\sqrt{x-4} \\ (a+c)^2+4 \equiv y & \Rightarrow a+c=\sqrt{y-4} \\ (a+b)^2+4 \equiv z & \Rightarrow a+b=\sqrt{z-4} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{x-4}+\sqrt{y-4}+\sqrt{z-4} = 2$ და უნდა ვიპოვოთ

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$-ის მინიმალური მნიშვნელობა.